JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 11 - 22, April 2001, ISSN : 1410-8518

SUBRUANG MARKED

Suryoto

Jurusan Matematika, FMIPA-UNDIP Semarang

Abstrak

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks **C**, T operator linier nilpoten pada V dan W subruang T-invariant dari V. W dikatakan *marked* jika terdapat basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V. Dalam tulisan ini ditunjukkan bahwa suatu basis Jordan untuk W dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V jika dan hanya jika basis tersebut mempunyai sifat ketetapan dan sifat kedalaman. Syarat perlu dan cukup suatu subruang T-invariant adalah *marked* juga diberikan secara geometri dengan memanfaatkan Inti dan Peta dari T.

PENDAHULUAN

Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan kompleks C, T operator linier nilpoten pada V dan W subruang T-invariant dari V. W dikatakan invariant terhadap T atau disingkat T-invariant, jika $T(x) \in W, \forall x \in W$. Suatu rantai (untuk T) adalah himpunan vektor-vektor tak nol :

$$\{ x, (T - \lambda I)(x), \ldots\ldots, (T - \lambda I)^{h-1}(x) \}$$

sedemikian hingga $(T - \lambda I)^h (x) = 0$. Dimana λ adalah nilai eigen dari T dan $(T - \lambda I)^{h-1}(x)$ adalah vektor eigen dari T yang berpadanan dengan nilai eigen λ. Basis Jordan untuk subruang T-invariant W adalah basis untuk W yang merupakan gabungan dari rantai-rantai. Sedangkan basis Jordan untuk V (disebut juga basis Jordan untuk T) adalah basis yang berbentuk :

$$\{ x_{ij}, (T - \lambda_i I)(x_{ij}), \ldots\ldots, (T - \lambda_i I)^{h_j - 1}(x_{ij}), i = 1, \ldots\ldots, t \,;\, j = 1, \ldots\ldots, s_i \}$$

dimana $x_{ij} \in V$ dan $(T - \lambda_i I)^{h_j}(x_{ij}) = 0$.

Gohberg dkk [6], memperkenalkan salah satu kelas dari subruang invariant yang mereka namakan subruang *marked*. Pada umumnya, tidak setiap subruang invariant adalah *marked*. Suatu subruang invariant dikatakan *marked* jika terdapat basis Jordan untuk subruang tersebut yang dapat diperluas menjadi menjadi basis Jordan untuk ruang vektor keseluruhan. Permasalahan yang muncul disini : bilamana basis Jordan untuk suatu subruang invariant dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk ruang vektor keseluruhan ? Untuk mengkaji permasalahan ini akan ditinjau dari segi ketinggian dan kedalaman suatu vektor dan sifat–sifat yang terkait. Karakterisasi subruang *marked* juga diberikan dalam keluarga subruang V_h^d = Ker $(T^h) \cap$ Im (T^d). Dalam pembahasan subruang *marked* ini hanya akan ditinjau untuk kasus operator linier T yang nilpoten.

Karakterisasi Basis Jordan yang Dapat Diperluas

Untuk selanjutnya misalkan $T : V \to V$, suatu pemetaan linier nilpoten dengan indeks α. Maka 0 adalah satu-satunya nilai eigen dari T. Untuk $x \in V$, *ketinggian* dari x, dinotasikan dengan ht (x), adalah bilangan bulat tak negatif terkecil h sedemikian hingga $T^h(x) = 0$. Untuk $x \neq 0$, *kedalaman* dari x, notasi dp (x), didefinisikan sebagai bilangan bulat tak negatif terbesar d sedemikian hingga $x = T^d(y)$, untuk suatu $y \in V$. Selanjutnya, suatu vektor tak nol x dikatakan mempunyai sifat ketetapan (*constancy property* = CP) jika berlaku salah satu : $T(x) = 0$ atau $T(x) \neq 0$ dan dp $(T(x))$ = dp $(x) + 1$.

Sedangkan suatu rantai $S = \{ x, T(x), \ldots\ldots, T^{h-1}(x) \}$ dikatakan mempunyai CP jika dan hanya jika berlaku dp $(T^{i-1}(x))$ = dp $(x) + i - 1$, $i = 1, \ldots\ldots, h$. Selanjutnya pandang himpunan bagian tak hampa B dari V yang bebas linier dengan $B = \{ x_1, \ldots\ldots, x_r \}$. B dikatakan mempunyai sifat kedalaman (*depth property* = DP), jika $\forall\, x \in$ span (B), $x \neq 0$ dengan $x = \alpha_1 x_1 + \ldots\ldots + \alpha_r x_r$, berlaku :

$$\text{dp}\,(x) = \min \{ \text{dp}\,(x_i) : \alpha_i \neq 0,\ i = 1, \ldots\ldots, r \}.$$

Catat bahwa sifat ketetapan (CP) dan sifat kedalaman (DP) ini tidak mengakibatkan satu terhadap yang lain.. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa sifat ketetapan dan sifat kedalaman ini akan mengkarakterisasi subruang *marked*. Namun sebelumnya akan diberikan terlebih dahulu beberapa lema berikut ini :

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 11 - 22, April 2001, ISSN : 1410-8518

Lema 1

Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan kompleks C. Jika C basis Jordan untuk V maka C mempunyai CP dan DP.

Lema 2

Misalkan S = { x, T(x), ….., T^{h-1}(x) } suatu rantai. Maka S maksimal jika dan hanya jika dp (x) = 0.

Lema 3

Misalkan A, B $\subseteq$ V, adalah himpunan dari vektor-vektor yang bebas linier dengan A $\cap$ B = $\varnothing$ dan A, B masing-masing mempunyai DP. Misalkan juga A $\cup$ B bebas linier. Jika A $\cup$ B tidak mempunyai DP maka terdapat x $\in$ span (A) dan y $\in$ span (B) dengan dp (x) = dp (y) sedemikian hingga :

$$dp\ (x+y) > dp\ (x) = dp\ (y).$$

Teorema 1

Misalkan W subruang T-invariant dari V dan B basis Jordan untuk W. Maka B dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V jika dan hanya jika B mempunyai CP dan DP.

Bukti : ($\Rightarrow$) Misalkan C basis Jordan untuk V, perluasan dari B. Maka berdasarkan lema 1, C mempunyai CP dan DP. Akibatnya, karena B $\subseteq$ C, maka B juga mempunyai CP dan DP.

($\Leftarrow$) Misalkan W subruang T-invariant dari V dan B = { x_i, T(x_i), ……, T^{h_i-1}(x_i), i = 1, ……, t } adalah basis Jordan dari W, mempunyai CP dan DP.

a) Jika W = V, pilih C = B basis Jordan untuk V, perluasan dari B.

b) Jika W $\neq$ V. Akan dikontruksi subruang T-invariant W\` yang memuat sejati W dan basis Jordan B\` untuk W\`, perluasan dari B, yang mempunyai CP dan DP.

Kasus 1 : Terdapat rantai di B yang tidak maksimal.

Misalkan S = { x_i, T(x_i), ……, T^{h_i-1}(x_i) } rantai di B yang tidak maksimal, untuk suatu i $\in$ { 1, ……, t }. Misalkan juga dp (x_i) = d > 0. Maka terdapat z $\in$ Vdan x_i = T^d(z), dengan dp (z) = 0 dan diperoleh rantai maksimal S\` = { z, ……, T^d(z) = x_i,

$T^{d+1}(x_i)$, ……, $T^{d+h_i-1}(x_i)$ }. Tulis B` = B ∪ S` dan W` = span (B`). Jelas bahwa W` subruang T-invariant dari V.

Klaim 1 : S` mempunyai CP.

Karena S` suatu rantai maka $T^j(z) \neq 0$, $\forall$ j = 0, ……, d + h_i – 1. Akan ditunjukkan dp ($T^j(z)$) = j, $\forall$ j = 0, ……, d + h_i – 1. Ambil sebarang j ∈ { 0, ……, d + h_i – 1 }. Jika j ≥ d, maka $T^j(z) \in$ S.

Tulis $T^j(z) = T^{j-d+d}(z) = T^{j-d}(x_i)$. Karena S mempunyai CP, maka dp ($T^j(z)$) = dp ($T^{j-d}(x_i)$) = dp (x_i) + j – d = d + j – d = j. Sebaliknya jika j < d, dAn karena dp (x_i) = d dengan $x_i = T^d(z)$, maka d = dp (x_i) = dp ($T^d(z)$) = dp ($T^{d-j}(T^j(z))$) ≥ dp ($T^j(z)$) + d – j. Jadi dp ($T^j(z)$) ≤ j. Akan tetapi dp ($T^j(z)$) ≥ j, dengan demikian diperoleh dp ($T^j(z)$) = j. Ini memperlihatkan bahwa S` mempunyai CP.

Klaim 2 : B` = B ∪ S` bebas linier.

Andaikan B` bergantung linier, maka terdapat kombinasi linier :

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{t}\sum_{j=0}^{h_k-1}\alpha_{kj}T^j(x_k)+\sum_{l=0}^{d+h_i-1}\alpha_{il}T^l(z) = 0,$$

dengan α_{kj}, $\alpha_{il} \in$ C, k = 1, ……, t; k ≠ i; j = 0, ……, d + h_i – 1, yang dipenuhi oleh α_{kj}, α_{il} yang tidak semuanya nol. Khususnya terdapat r dengan 0 ≤ r < d, sedemikian hingga $\alpha_{ir} \neq 0$. Karena

0 ≤ r < d, maka r mempunyai nilai minimum, misalkan s = min { r : $\alpha_{ir} \neq 0$, dengan 0 ≤ r < d }. Dengan demikian,

$$T^{d-s}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{t}\sum_{j=0}^{h_k-1}\alpha_{kj}T^j(x_k)+\sum_{l=0}^{d+h_i-1}\alpha_{il}T^l(z)\right) = 0$$ atau diperoleh :

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{t}\sum_{j=d-s}^{h_k-1}\alpha_{k,j-(d-s)}T^j(x_k)+\sum_{l=0}^{h_i-1}\alpha_{i,l+s}T^l(x_i) = 0,$$

suatu kombinasi linier dari unsur-unsur di B yang dipenuhi oleh $\alpha_{is} \neq 0$. Akibatnya B bergantung linier, ini bertentangan dengan B yang bebas linier. Jadi haruslah B` bebas linier.

Klaim 3 : B` mempunyai DP.

Andaikan B` tidak mempunyai DP. Maka menurut lema 3, terdapat $w \in W$ dan $x \in$ span (S` - S) dengan dp (w) = dp (x) dan dp (w + x) > dp (w) = dp (x).

Karena $x \in$ span (S` - S) = span ({ z, ……, T^{d-1}(z) }), tulis $x = \sum_{k=0}^{d-1} \gamma_k T^k(z)$, dengan $\gamma_k \in C$,

k = 0, ……, d – 1. Misalkan dp (x) = r, dengan $0 \le r < d$, maka

$x = \sum_{k=r}^{d-1} \gamma_k T^k(z)$, dengan $\gamma_r \neq 0$. Tulis v = w + x, jelas bahwa $v \in$ span (B`) = W` dan dp (v) > r.

Dengan demikian dp (T^{d-r}(v)) $\ge$ dp (v) + d – r > r + d – r = d (1)

Akan tetapi $T^{d-r}(v) = T^{d-r}(w) + \sum_{k=0}^{d-r-1} \gamma_{k+r} T^k(x_i) \in$ W = span (B) dan $T^{d-r}(v) \neq 0$, maka

$$\text{dp } (T^{d-r}(v)) = \min \{ \text{dp } (T^{d-r}(w)), \text{dp } (\sum_{k=0}^{d-r-1} \gamma_{k+r} T^k(x_i)) \} = d.$$

Ini bertentangan dengan (1), jadi haruslah B` mempunyai DP.

Kasus 2 : Setiap rantai di B adalah rantai maksimal.

Klaim : Terdapat $v \in V$, $v \notin W$ = span (B) dengan ht (v) = 1.

Misalkan $u \in V$, $u \notin W$ dengan ht (u) = h. Maka $T^h(u) = 0$ dan $T^{h-1}(u) \neq 0$.

Jika $T^{h-1}(u) \notin W$, pilih $v = T^{h-1}(u)$. Sebaliknya jika $T^{h-1}(u) \in W$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat terkecil r dengan $0 < r \le h - 1$ sedemikian hingga $T^r(u) \in W$.

Karena , $u \notin W$ dan $T^{h-1}(u) \in W$, pandang himpunan N = { j : $T^j(u) \in W$, j = 1, ……, h – 1 } $\neq \emptyset$. Karena $N \subseteq$ { 1, ……, h – 1 }, maka N mempunyai unsur terkecil, misalkan r. Dengan demikian dp (T^r(u)) $\ge$ r > 0 atau dp (T^r(u)) $\ge$ 1. $T^r(u) \in$ W = span (B), tulis $T^r(u) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{h_i-1} \alpha_{ij} T^j(x_i)$, untuk suatu $\alpha_{ij} \in C$. Karena dp (T^r(u)) $\ge$ 1, maka untuk j = 0, $\alpha_{ij} = 0$, $\forall$ i = 1, ……, t dan diperoleh

$$T^r(u) = T(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{h_i-2}\alpha_{i,j+1}T^j(x_i)),$$

dimana $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{h_i-2}\alpha_{i,j+1}T^j(x_i) \in$ W. Jadi terdapat z $\in$ W dan berlaku $T^r(u) = T(z)$.

Tulis x = z – $T^{r-1}(z)$. Jelas bahwa x $\notin$ W dan x $\neq$ 0, serta T(x) = T(z – $T^{r-1}(z)$) = T(z) – $T^r(u)$ = 0. Jadi x adalah vektor eigen dari T (yang berpadanan dengan nilai eigen 0).

Dengan demikian klaim telah terbukti.

Pilih S = { u, T(u), ……, $T^{h-1}(u)$ } rantai dengan panjang terbesar dengan v = $T^{h-1}(u) \notin$ W.

Misalkan B` = B $\cup$ S. Dengan cara yang serupa seperti pada kasus 1 dapat diperlihatkan bahwa B` bebas linier. Karena B $\cap$ S = $\emptyset$ dan W = span (B), maka B` basis untuk W` = W $\oplus$ span (S) dan jelas bahwa W` adalah subruang T-invariant dari V. Lagi dengan cara yang serupa seperti pada kasus 1 dapat ditunjukkan bahwa S mempunyai CP dan B` mempunyai DP.

Sehingga dengan mengulang prosedur di atas diperoleh basis Jordan untuk V, yang merupakan perluasan dari B.

Karakterisasi Subruang Marked

Misalkan B himpunan bagian tak hampa dari V yang bebas linier, didefinisikan :

$$B_h = \{ x \in B : ht(x) = h \}$$

$$B^d = \{ x \in B : dp(x) = d \}$$

$$B_h^d = \{ x \in B : ht(x) = h, dp(x) = d \}.$$

Selanjutnya untuk h, d $\geq$ 0, misalkan

$$K_h = Ker(T^h) = \{ x \in V : ht(x) \leq h \}$$

$$I^d = Im(T^d) = \{ x \in V : dp(x) \geq d \}$$

$$V_h^d = K_h \cap I^d = Ker(T^h) \cap Im(T^d).$$

Karena $V_h^d = I^d$, untuk $d + h \geq \alpha$, dengan α = indeks nilpoten dari pemetaan linier T, pada tulisan ini hanya ditekankan pada kasus $d + h \leq \alpha$. Dengan pendefinisian di atas diperoleh barisan subruang :

$$\{ 0 \} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots\ldots \subseteq K_\alpha = \ldots\ldots = K_n = V$$

$$\{ 0 \} = I^n = \ldots\ldots = I^\alpha \subseteq I^{\alpha-1} \subseteq \ldots\ldots \subseteq I^0 = V$$

dan dipunyai diagram berikut ini :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\cdots & \subset & V_h^{d+1} & \subset & V_h^d & \subset & V_h^{d-1} & \subset & \cdots & \subset & V_h^0 & = & K_h \\
 & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\cdots & \subset & V_{h-1}^{d+1} & \subset & V_{h-1}^d & \subset & V_{h-1}^{d-1} & \subset & \cdots & \subset & V_{h-1}^0 & = & K_{h-1} \\
 & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}$$

Dari diagram diperoleh $V_h^{d+1} + V_{h-1}^d \subset V_h^d$, dimana vektor-vektor di ruas kanan yang tidak berada di ruas kiri akan memegang peranan penting di dalam karakterisasi subruang *marked* ini.

Misalkan W subruang T-invariant dari V, jelas bahwa dipenuhi

$$W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d \subseteq W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d). \qquad (2)$$

Jika inklusi balikan dari (2) juga berlaku, hal ini akan mengkarakterisasi subruang *marked*, seperti diberikan oleh teorema berikut ini :

Teorema 2

Misalkan W subruang T-invariant dari V. Maka W dikatakan marked jika dan hanya jika

$$W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d = W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d),$$

$$\forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha.$$

Namun sebelum membuktikan teorema di atas akan diberikan terlebih dahulu beberapa lema berikut ini :

Lema 4

Misalkan B basis Jordan untuk V, maka berlaku $V_h^d = [B_h^d] \oplus (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)$,

$\forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$.

Lema 5

Misalkan W subruang T-invariant dari V dan B basis Jordan untuk W. Jika B dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V, maka berlaku

$$[B_h^d] \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d) = \{ 0 \},$$

$\forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$.

Lema 6

Misalkan K, K`, L dan L` adalah sub-sub ruang dari V, dengan K`* $\subseteq$ *K, L` $\subseteq$ *L sedemikian hingga*

V = K $\oplus$ *L = K`* $\oplus$ *L`, maka K` = K dan L` = L.*

Lema 7

Misalkan W subruang T-invariant dari V dan F subruang dari W sedemikian hingga

$$W \cap V_h^d \supseteq F \oplus (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)),$$

dengan $h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$, *maka T menginduksi suatu isomorfisma* $F \xrightarrow{\sim}$ *T(F) dan* $W \cap V_{h-1}^{d+1} \supseteq T(F) \oplus (W \cap (V_{h-1}^{d+2} + V_{h-2}^{d+1}))$.

Lema 8

Misalkan W subruang T-invariant dari V dan B keluarga dari vektor-vektor di V yang bebas linier sedemikian hingga :

$$W \cap V_h^d = [B_h^d] \oplus (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d),$$

$\forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha$. *Maka* $W = \bigoplus_{h=1}^{\alpha} \bigoplus_{d=0}^{\alpha-h} [B_h^d]$ *dan pada khususnya B basis untuk W.*

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 11 - 22, April 2001, ISSN : 1410-8518

Lema 9

Misalkan $x \neq 0$, dengan ht (x) = h > 1dan dp (x) = d $\leq \alpha$ - h. Maka x mempunyai FCP jika dan hanya jika $x \notin V_h^{d+1} + V_{h-1}^d$.

Sekarang akan dibuktikan teorema 2 di atas.

($\Rightarrow$) Misalkan W *marked* dan B basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V. Ambil sebarang h $\geq$ 1, d $\geq$ 0, dengan d + h $\leq \alpha$. Karena W subruang dari V maka

$$W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d \subseteq W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d) \subseteq W \cap V_h^d. \qquad (3)$$

Karena B basis Jordan untuk W yang dapat diperluas menjadi basis Jordan untuk V, maka menurut lema 5 diperoleh $[B_h^d] \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d) = \{0\}$, dan akibatnya

$$[B_h^d] \cap (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)) = \{0\}. \qquad (4)$$

Karena $[B_h^d] \subseteq W \cap V_h^d$ serta mengingat (3) dan (4) diperoleh

$$[B_h^d] \oplus (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)) \subseteq W \cap V_h^d. \qquad (5)$$

Sebaliknya, ambil sebarang $x \in W \cap V_h^d$, dengan $x \neq 0$, dengan melihat bentuk kombinasi linier x atas B diperoleh $x = x_1 + x_2 + x_3$, dengan $x_1 \in [B_h^d]$, $x_2 \in V_h^{d+1}$ dan $x_3 \in V_{h-1}^d$.

Karena $x_2, x_3 \in W$, maka $x_2 + x_3 \in W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)$ dan akibatnya diperoleh $x \in [B_h^d] + (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d))$ atau

$$W \cap V_h^d \subseteq [B_h^d] + (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)). \qquad (6)$$

Sehingga dengan mengingat (5) diperoleh :

$$W \cap V_h^d = [B_h^d] \oplus (W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^d)). \qquad (7)$$

Jelas bahwa $[B_h^d] + (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^d)) \subseteq W \cap V_h^d$.

Sebaliknya, ambil sebarang $x \in W \cap V_h^d$, dengan $x \neq 0$, maka $x = x_1 + x_2 + x_3$, dengan $x_1 \in [B_h^d]$,

$x_2 \in V_h^{d+1}$ dan $x_3 \in V_{h-1}^{d}$. Karena x_2, $x_3 \in W$, jadi $x_2 \in W \cap V_h^{d+1}$ dan $x_3 \in W \cap V_{h-1}^{d}$, maka $x \in [B_h^d] + (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^{d})$ atau $W \cap V_h^d \subseteq [B_h^d] + (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^{d})$.

Dengan demikian diperoleh $W \cap V_h^d \subseteq [B_h^d] + (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^{d})$.

Klaim : $[B_h^d] \cap (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^{d}) = \{ 0 \}$.

Misalkan $x = y + z$, dengan $x \in [B_h^d]$, $y \in W \cap V_h^{d+1}$ dan $z \in W \cap V_{h-1}^{d}$, dan andaikan $x \neq 0$. Maka dipunyai $T^{h-1}(x) = T^{h-1}(y + z) = T^{h-1}(y) \neq 0$. Akibatnya dp $(T^{h-1}(x)) \geq d + h$.

Akan tetapi $T^{h-1}(x) \in W = \text{span}(B)$, dengan B mempunyai DP, jadi dp $(T^{h-1}(x)) = d + h - 1$.

Ini bertentangan dengan hasil sebelumnya. Jadi haruslah $x = 0$ dan terbukti bahwa $[B_h^d] \cap (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^{d}) = \{ 0 \}$. Dengan demikian diperoleh

$$W \cap V_h^d = [B_h^d] \oplus (W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^{d}). \qquad (8)$$

Sehingga dari (7) dan (8) serta dengan mengingat lema 6 diperoleh

$$W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^{d} = W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^{d}).$$

($\Leftarrow$) Untuk membuktikan bahwa W *marked*, cukup apabila dapat dikontruksi suatu basis Jordan untuk W, yang mempunyai CP dan DP. Ambil sebarang $\gamma \in \{ 1, \ldots\ldots, \alpha \}$. Akan dikontruksi basis Jordan untuk W berturut-turut sebagai berikut :

$W \cap V_\gamma^0 = (W \cap V_\gamma^1 + W \cap V_{\gamma-1}^0) \oplus [B_\gamma^0]$

$W \cap V_{\gamma-1}^1 = (W \cap V_{\gamma-1}^2 + W \cap V_{\gamma-2}^1) \oplus [T(B_\gamma^0)] \oplus [B_{\gamma-1}^1]$

$\vdots$

$W \cap V_1^{\gamma-1} = (W \cap V_1^\gamma) \oplus [T^{\gamma-1}(B_\gamma^0)] \oplus [T^{\gamma-2}(B_{\gamma-1}^1)] \oplus \ldots\ldots \oplus \oplus [T(B_2^{\gamma-2})] \oplus [B_1^{\gamma-1}]$,

dan proses ini well defined karena lema 7.

Tulis $B^{*i}_{\gamma-i} = \bigcup_{j=0}^{i} T^{i-j}(B^{j}_{\gamma-j})$, i = 0, ……, γ - 1. Maka $B^{*i}_{\gamma-i}$ basis untuk $\bigoplus_{j=0}^{i}[T^{i-j}(B^{j}_{\gamma-j})]$. Dengan demikian $\bigoplus_{j=0}^{i}[T^{i-j}(B^{j}_{\gamma-j})] = [B^{*i}_{\gamma-i}]$, dan diperoleh

$$W \cap V^{i}_{\gamma-i} = (W \cap V^{i+1}_{\gamma-i} + W \cap V^{i}_{\gamma-i-1}) \oplus [B^{*i}_{\gamma-i}],\ i = 0, \ldots\ldots, \gamma - 1.$$

Sedangkan lema 8 menjamin bahwa gabungan $B^* = \bigcup_{\gamma=1}^{\alpha}\bigcup_{i=0}^{\gamma-1} B^{*i}_{\gamma-i}$ adalah basis untuk W.

Tinggal diperlihatkan bahwa B* mempunyai CP dan DP.

Ambil sebarang $b \in B^*$, maka $b \in B^{*i}_{\gamma-i}$, untuk suatu $i \in \{0, \ldots\ldots, \gamma - 1\}$ dan $\gamma \in \{1, \ldots\ldots, \alpha\}$. Akibatnya $b \in W \cap V^{i}_{\gamma-i}$. Karena $W \cap V^{i}_{\gamma-i} = [B^{*i}_{\gamma-i}] \oplus (W \cap V^{i+1}_{\gamma-i} + W \cap V^{i}_{\gamma-i-1})$ atau

$[B^{*i}_{\gamma-i}] \oplus (W \cap V^{i+1}_{\gamma-i} + W \cap V^{i}_{\gamma-i-1}) = \{0\}$ dan mengingat $b \in [B^{*i}_{\gamma-i}]$ serta $b \neq 0$, maka diperoleh $b \notin W \cap V^{i+1}_{\gamma-i} + W \cap V^{i}_{\gamma-i-1}$. Karena $W \cap V^{i+1}_{\gamma-i} + W \cap V^{i}_{\gamma-i-1} = W \cap (V^{i+1}_{\gamma-i} + V^{i}_{\gamma-i-1})$ dan $b \in W$, maka $b \notin V^{i+1}_{\gamma-i} + V^{i}_{\gamma-i-1}$. Maka berdasarkan lema 9, b mempunyai FCP atau rantai $\{ b, T(b), \ldots\ldots, T^{\gamma-i-1}(b) \}$ mempunyai CP. Dengan demikian B* mempunyai CP.

Selanjutnya dengan menggunakan induksi matematika dan menerapkan lema 3 dapat dibuktikan bahwa B* mempunyai DP. Dengan demikian karena B* basis Jordan untuk W mempunyai CP dan DP, maka terbukti bahwa W *marked*.

KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan :

1. Salah satu ciri yang mengkarakterisasi subruang *marked* adalah eksistensi dari basis Jordan dari subruang yang bersangkutan yang mempunyai CP dan DP.
2. Karakterisasi yang lain untuk suatu subruang *marked* W dari V adalah dipenuhinya hubungan :

   $W \cap V_h^{d+1} + W \cap V_{h-1}^{d} = W \cap (V_h^{d+1} + V_{h-1}^{d}), \ \forall h \geq 1, d \geq 0, d + h \leq \alpha,$

   dimana α adalah indeks nilpoten dari pemetaan linier T.

DAFTAR PUSTAKA

1. Arifin, A., *Aljabar Linier*, Penerbit ITB, Bandung, 1995.

2. Bru, R., L. Rodman and H. Scheneider, *Extensions of Jordan Bases for Invariant Subspace of a Matrix, Linear Algebra and Its Applications*, 1991, 150 : 209 – 225.

3. Burton, D. M., *Abstract and Linear Algebra*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1972.

4. Ferrer, J., F. Puerta and X. Puerta, *Geometric Characterization and Classification of Marked Subspaces, Linear Algebra and Its Applications*, 1996, 235 : 35 – 46.

5. Friedberg, S., A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice Hall, New York, 1992.

6. Gohberg, I., P. Lancaster and L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*, John Willey & Sons, New York, 1986.

7. Jacob, B., *Linear Algebra*, W. H. Freeman and Company, New York, 1990.

8. Roman, S., *Advanced Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1992.